Les Carrés Magiques

Table des matières

1 Introduction

1.1 Définition

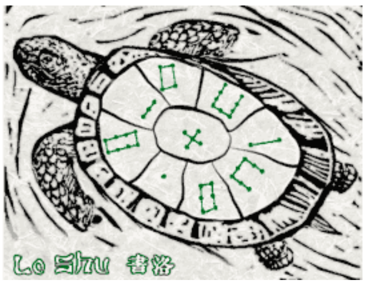
Un carré magique d'ordre n est un tableau carré, formé de n^2 cases , donc de n lignes et n colonnes. Dans chaque case est écrit un nombre, de telle sorte que les n^2 premiers entiers soient écrits et que les sommes des nombres de chaque ligne, colonne, et des deux diagonales, soit les mêmes.

Carré magique d'ordre 3 :

6	7	2
1	5	9
8	3	4

1.2 Histoire

On trouve les premiers carrés magiques en Chine vers 3000 av. J.-C. Pour les Chinois, le carré magique symbolise l'harmonie de l'univers. Ce carrré d'ordre 3 se nomme Lo Shu.



Voici une version de l'histoire de "Lo Shu"

Lo : nom d'une rivière

Shu : signifie "livre"

Jadis en Chine, il y eut une très grande inondation.

Pour calmer sa colère, les gens donnent des offrandes au dieu de la rivière "Lo", l'un des fleuves en crue.

Mais, à chaque fois, une tortue sort de la rivière et fait le tour des offrandes.

Le dieu de la rivière refuse de considérer cette offrande, jusqu'à ce qu'un jour, un enfant observe les formes curieuses sur la carapace de la tortue. c'est à ce moment qu'ils comprirent qu'il fallait mettre 15 offrandes.

D'après **Philip I.S. Lei - Hong-Kong**

Le premier carré d'ordre 4 apparait au Xéme siécle en Inde.

Les musulmans utilisent les carrés magique d'ordre 5 en mettant le 1 au centre du carré, car c'est un symbole d'Allah. Le carré central restait blanc, car Allah ne doit pas être représenté.

Ce sont les arabes qui considéreront les carrés magiques non plus comme des symboles mais plutôt comme des objets mathématiques.

Puis , les carrés magiques arriveront en occident, où ils seront utilisés à la Renaissance par un alchimistes (Cornelius Agrippa), qui leur donnera une signification astronomique.

Chez les Roses Croix, ils servent à masquer le chiffre de la Bête (=666) dans le carré magique de $6 \times 6 = 36$ cases (somme = 111).

2 Une méthode de résolution (de Maxime Ancelin)

Entre les années 2000 et 2003 je me suis pris de passion pour les carrés magiques. J'ai mis au point une méthode de résolution géométrique, simplement par intuition et avec un minimum de calculs mathématiques.

Ce travail de recherche que je viens de réaliser avec mon camarade m'a permis de revenir sur certains carrés et de les améliorer, ainsi que d'approfondir mes méthodes de résolution.

2.1 Résolution du carré de 3 et definitions

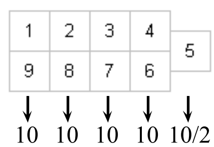
2.1.1 Total T d'une ligne , colonne ou diagonale

Le total de tous les nombres composant le carré de 3 est

$$\sum_{i=1}^{9} i = 45 = 3 \times 15$$

Le total de chaque ligne, colonne ou diagonale est donc $T = \frac{45}{3} = 15 = 3 \times 5$

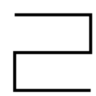
5 occupe la case centrale, les chiffres qui gravitent autour totalisent deux à deux 10, ils sont complémentaires.



On peut généraliser : pour tout carré d'ordre n , $T = \frac{1+n^2}{2} \times n = \frac{n+n^3}{2}$

2.1.2 La "matrice serpent"

Definition : Une "matrice serpent" d'ordre n est une certaine disposition de n^2 nombres dans une grille carrée de coté n.



Pour avoir une "matrice serpent" d'ordre n, on doit écrire les nombres de 1 a n^2 dans l'ordre croissant , en écrivant de gauche à droite sur les lignes impaires et de droite à gauche sur les lignes paires.

La "matrice serpent" est un point de départ pour résoudre les carrés magiques.

Une fois la matrice écrite, on calcule les totaux des lignes , colonnes et diagonales, comme si on vérifiait un carré magique. On observe alors des écarts sur certaines lignes , colonnes et/ou diagonales. Ces écarts sont symétriques par rapport à la ligne verticale et à la ligne horizontale passant par le centre du carré.

$\boxed{T = 15}$

	1	2	3	->	-9
	6	5	4	->	0
	7	8	9	->	9
↙	v	v	v	↘	
0	-1	0	1		0

"Matrice serpent" d'ordre 3 , avec les écarts par rapport a T calculés

En déplaçant certains nombres, de manière symétrique par rapport à ces deux axes passant par le centre du carré, on peut "rééquilibrer" les nombres, c'est à dire rétablir le bon total pour chaque ligne , colonne et diagonale.

On obtient alors le carré de magique 3 :

6	7	2
1	5	9
8	3	4

Macro excel pour créer une matrice serpent d'ordre n

```
Sub ligneImpaire(ByVal n As Long, ByVal h As Long)
  Dim i As Long
  For i = 1 To n
      Cells(h + 3, i + 3).Value = n * (h - 1) + i
      Cells(h + 3, i + 3).Orientation = 0
  Next i
End Sub
Sub lignePaire(ByVal n As Long, ByVal h As Long)
  Dim i As Long
  For i = 1 To n
      Cells(h + 3, i + 3).Value = n * h - (i - 1)
      Cells(h + 3, i + 3).Orientation = 0
  Next i
End Sub

Sub matSerp()
```

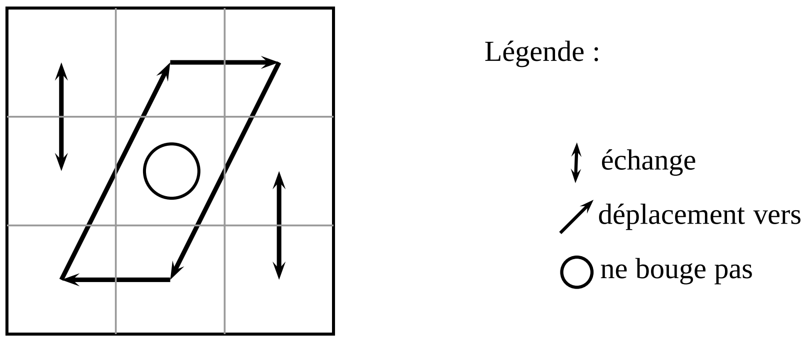
```
 Dim h As Long
 Dim n As Long
 n = Application.InputBox("n␣:", Type:=1)
 For h = 1 To n
    If h Mod 2 <> 0 Then
     ligneImpaire n, h
    Else
     lignePaire n, h
    End If
 Next h
End Sub
'T = ((1 + n*n) / 2)* n = (n + n^3)/ 2
Sub totauxMatSerp()
 Dim h As Long
 Dim n As Long
 Dim i As Long
 Dim Td As Long
 Dim T As Long
 n = Application.InputBox("n␣:", Type:=1)
 T = (n + n * n * n) / 2
 Cells(2, 2).Value = "T=␣" & T
 For h = 1 To n      'horizontales
     For i = 1 To n
       If i = 1 Then
         Td = 0
       End If
       Cells(h + 3, n + 4).Value = "->"
       Td = Cells(h + 3, i + 3).Value + Td
       If i = n Then
         Cells(h + 3, n + 5).Value = Td - T
         Cells(h + 3, n + 5).Orientation = 0
       End If
     Next i
  Next h
  For i = 1 To n     'verticales
     For h = 1 To n
       If h = 1 Then
         Td = 0
       End If
       Cells(4 + n, i + 3).Value = "->"
       Cells(4 + n, i + 3).Orientation = -90
       Td = Cells(3 + h, i + 3).Value + Td
       If h = n Then
         Cells(n + 5, i + 3).Value = Td - T
```

```
            Cells(n + 5, i + 3).Orientation = 0
          End If
        Next h
    Next i
    For i = 1 To n    'diagonale hg bd
          If i = 1 Then
            Td = 0
          End If
          Td = Cells(3 + i, i + 3).Value + Td
          If i = n Then
            Cells(n + 5, n + 5).Value = Td - T
            Cells(n + 5, n + 5).Orientation = 0
          End If
    Next i
    Cells(n + 4, n + 4).Value = "->"
    Cells(4 + n, n + 4).Orientation = -45
    For i = 1 To n    'diagonale bg hd
          If i = 1 Then
            Td = 0
          End If
          Td = Cells(4 + n - i, i + 3).Value + Td
          If i = n Then
            Cells(n + 5, 2).Value = Td - T
            Cells(n + 5, 2).Orientation = 0
          End If
    Next i
    Cells(n + 4, 3).Value = "<-"
    Cells(n + 4, 3).Orientation = 45
End Sub
```

2.1.3 Représentation d'une solution

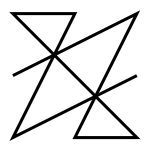
Une fois un carré magique trouvé, on peut shématiser sa solution, qui resservira pour résoudre des carrés de plus grand ordre. Voila deux maniéres de représenter les solutions :

Shéma des déplacements : Un shéma de déplacement indique les déplacements de nombres d'une "matrice serpent" afin d'avoir un carré magique.



Shéma des déplacements du carré magique d'ordre 3

Signe du carré magique : Le **signe** d'un carré magique est obtenu en reliant dans l'ordre croissant par des segments les nombres de 1 a n^2 qui composent un carré magique.

signe du carré de 3 : 

2.2 Carré de 4

Le principe de résolution est à peu prés le même que pour le carré de 3.

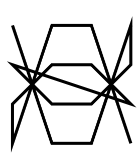
Tout d'abord, on pose la matrice serpent d'ordre 4 (générée ici sous Excel à l'aide de la macro précedemment presentée).

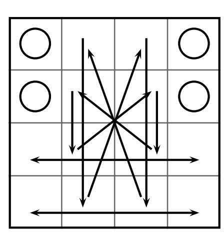
T= 34		1	2	3	4	->	-24
		8	7	6	5	->	-8
		9	10	11	12	->	8
		16	15	14	13	->	24
	↙	v	v	v	v	↘	
2		0	0	0	0		-2

On réequilibre cette matrice, on obtient alors un carré d'ordre 4. Plusieurs solutions sont possibles. Ci-dessous on obtient un motif symétrique lorsque en traçant le signe du carré, utile pour plus tard.

1	14	15	4
8	11	10	5
12	7	6	9
13	2	3	16

Voici les representations de ce carré :





2.3 Carré de 5

Pour résoudre le carré de 5, on va se resservir du carré de 3 (soit de son shéma de déplacements, soit de son signe) qui va former le noyau du carré de 5. Pour créer ce noyau, on écrit la matrice serpent et on réorganise les nombres selon le signe du carré de 3 (ou le shéma de déplacement du carré de 3) situé dans le carré central d'ordre 3. Ce noyau est un carré d'ordre 3, de constante magique (total) $= 3 \times 13 = 39$. Il nous restera plus qu'à calculer la couronne.

T= 65								
		1	2	3	4	5	->	-50
		10	9	8	7	6	->	-25
		11	12	13	14	15	->	0
		20	19	18	17	16	->	25
		21	22	23	24	25	->	50
	↙	↓	↓	↓	↓	↓	↘	
0		-2	-1	0	1	2		0

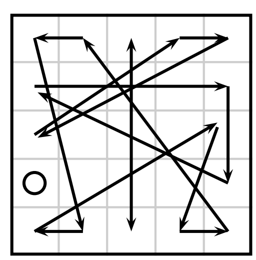
matrice serpent d'ordre 5

		1	2	3	4	5	->	-50
		10	14	17	8	6	->	-10
		11	7	13	19	15	->	0
		20	18	9	12	16	->	10
		21	22	23	24	25	->	50
	↙	↓	↓	↓	↓	↓	↘	
0		-2	-2	0	2	2		0

matrice serpent d'ordre 5 ou le noyau central est organisé selon le signe du carré de 3

Un carré de 5 est :

2	25	23	11	4
16	14	17	8	10
5	7	13	19	21
20	18	9	12	6
22	1	3	15	24



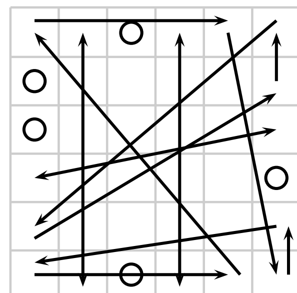
shéma de déplacement de la couronne extérieure du carré de 5

2.4 Carré de 6

Le carré de 6 est construit avec la même méthode que le carré de 5, c'est a dire en utilisant un carré d'ordre inférieur (ici le carré de 4) pour construire un noyau.

Un carré de 6 est :

32	35	3	33	1	7
12	11	28	27	8	25
13	14	21	22	17	24
18	20	15	16	23	19
6	29	10	9	26	31
30	2	34	4	36	5

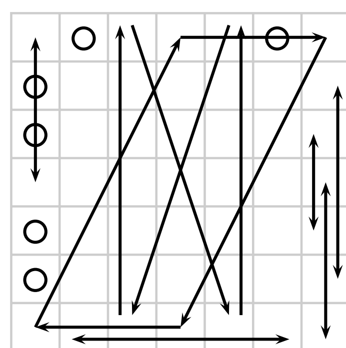


shéma de déplacement de la couronne extérieure du carré de 6

2.5 Carré de 7

Pour résoudre le carré de 7, on utilise le signe du carré de 3 pour le noyau, puis le shéma de déplacement du carré de 5 pour une premiére couronne. Ensuite il reste a calculer la couronne externe, d'ordre 7. Un carré de 7 est :

28	2	45	43	47	6	4
4	12	37	39	27	10	36
15	34	26	31	18	16	35
1	9	17	25	33	41	49
29	30	32	19	24	20	21
42	40	13	11	23	38	8
46	48	5	7	3	44	22

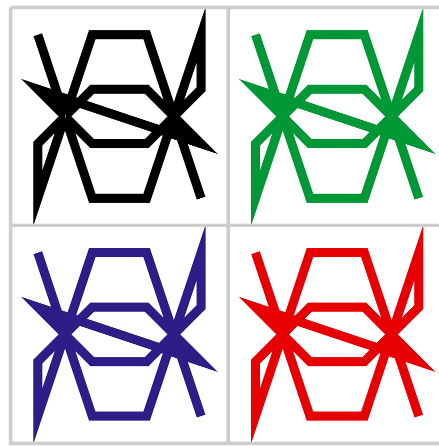


shéma de déplacement de la couronne extérieure du carré de 7

2.6 Carré de 8

Pour ce carré, il y a une méthode plus rapide que la méthode des couronnes. La constante magique est $260 = 2 \times 130$. On peu donc faire quatre carrés d'ordre 4 de constante magique 130. Pour cela, on écrit la matrice serpent d'ordre 8 et on réoganise selon le signe du carré de 4 les lignes complémentaires de la matrice sepent (de même couleur ci-dessous).

1	2	3	4	5	6	7	8
16	15	14	13	12	11	10	9
17	18	19	20	21	22	23	24
32	31	30	29	28	27	26	25
33	34	35	36	37	38	39	40
48	47	46	45	44	43	42	41
49	50	51	52	53	54	55	56
64	63	62	61	60	59	58	57



On obtient alors ce carré de 8 :

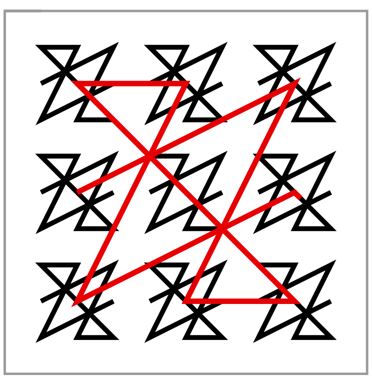
1	62	63	4	9	54	55	12
8	59	58	5	16	51	50	13
60	7	6	57	52	15	14	49
61	2	3	64	53	10	11	56
25	38	39	28	17	46	47	20
32	35	34	29	24	43	42	21
36	31	30	33	44	23	22	41
37	26	27	40	45	18	19	48

2.7 Carré de 9

Ce carré magique a aussi une méthode de résolution assez simple. Prenons la matrice serpent d'ordre 9, divisée en 9 carrés d'ordre 3 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
18	17	16	15	14	13	12	11	10
19	20	21	22	23	24	25	26	27
36	35	34	33	32	31	30	29	28
37	38	39	40	41	42	43	44	45
54	53	52	51	50	49	48	47	46
55	56	57	58	59	60	61	62	63
72	71	70	69	68	67	66	65	64
73	74	75	76	77	78	79	80	81

Chacuns de ces carrés de 3 sont réorganisés internement selon le signe du carré de 3, puis sont réorganisés entre eux selon le signe du carré de 3. On a la même organisation a deux echelles différentes.



On obtient alors ce carré de 9 :

39	52	35	72	73	56	15	22	5
34	38	54	55	71	75	4	14	24
53	36	37	74	57	70	23	6	13
18	19	2	42	49	32	66	79	62
1	17	21	31	41	51	61	65	81
20	3	16	50	33	40	80	63	64
69	76	59	12	25	8	45	46	29
58	68	78	7	11	27	28	44	48
77	60	67	26	9	10	47	30	43

2.8 Carré de 10

Pour résoudre ce carré, on utilise la méthode des couronnes. Le noyau est obtenu en applicant le shéma du carré de 8, ensuite on calcule la couronne extérieure. On obtient :

93	21	90	41	51	6	7	91	9	96
30	12	87	88	15	22	77	78	25	71
2	19	84	83	16	29	74	73	26	99
31	85	18	17	82	75	28	27	72	70
4	86	13	14	89	76	23	24	79	97
100	42	57	58	45	32	67	68	35	1
61	49	54	53	46	39	64	63	36	40
98	55	48	47	52	65	38	37	62	3
81	56	43	44	59	66	33	34	69	20
5	80	11	60	50	95	94	10	92	8

2.9 Carré de 11

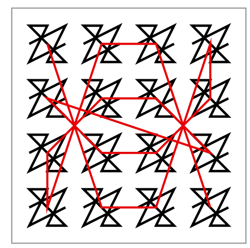
Pour ce carré magique, on utilise aussi la méthode des couronnes. Le noyau est obtenu en applicant le shéma du carré de 9, ensuite on calcule la couronne extérieure. On obtient ce carré :

1	120	66	118	5	116	7	114	9	112	3
22	65	68	47	92	107	86	29	38	17	100
33	46	64	70	85	91	109	16	28	40	89
44	69	48	63	108	87	90	39	18	27	78
11	26	41	20	62	71	50	98	101	80	111
77	19	25	43	49	61	73	79	97	103	45
67	42	21	24	72	51	60	102	81	96	55
88	95	104	83	32	35	14	59	74	53	34
99	82	94	106	13	31	37	52	58	76	23
110	105	84	93	36	15	30	75	54	57	12
119	2	56	4	117	6	115	8	113	10	121

2.10 Carré de 12

La méthode de résolution de ce carré est semblable a celle du carré de 9. On pose la matrice serpent d'ordre 12, puis on la divise en 16 carrés d'ordre 3. On réorganise internement chacun de ces carrés , à l'aide du signe du carré de 3. Puis on réorganise ces 16 carrés entre eux selon les signe du carré de 4.

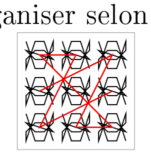
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
72	71	70	69	68	67	66	65	64	63	62	61
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
96	95	94	93	92	91	90	89	88	87	86	85
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
120	119	118	117	116	115	114	113	112	111	110	109
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132
144	143	142	141	140	139	138	137	136	135	134	133



On obtient alors :

24	25	2	129	136	113	126	139	116	15	34	11
1	23	27	112	128	138	115	125	141	10	14	36
26	3	22	137	114	127	140	117	124	35	12	13
51	70	47	90	103	80	93	100	77	60	61	38
46	50	72	79	89	105	76	92	102	37	59	63
71	48	49	104	81	88	101	78	91	62	39	58
87	106	83	54	67	44	57	64	41	96	97	74
82	86	108	43	53	69	40	56	66	73	95	99
107	84	85	68	45	52	65	42	55	98	75	94
132	133	110	21	28	5	18	31	8	123	142	119
109	131	135	4	20	30	7	17	33	118	122	144
134	111	130	29	6	19	32	9	16	143	120	121

Une autre bonne solution est de prendre 9 carrés d'ordre 4 et de les organiser selon le signe du carré de 3.



3 Carrés magiques avec des propriétés additionnelles

3.1 Les carrés diaboliques

Un carré diabolique est un carré magique d'ordre n dans lequel la même constante magique peut être trouvée non seulement dans les lignes, les colonnes et les diagonales, mais aussi dans une variété de configuration régulière et géométrique (nous verrons plus tard).Prenons maintenant comme exemple le carré d'ordre 5.

Nous allons proposer une méthode permettant de construire un carré diabolique d'ordre 5, la démarche est la suivante :

1. placer le 1 n' importe où dans la grille.
2. pour la prochaine valeur on avance de un vers le haut et de deux vers la droite (quand on arrive à l'extrémité de la grille prenons par exemple l'extrémité droite on repasse à gauche).
3. Toutes les cinq cases après avoir placé un multiple de 5, on se déplace de un vers la droite et de un vers le bas (car sinon on retournerait vers un axe déjà occupé.

1	15	24	8	17
23	7	16	5	14
20	4	13	22	6
12	21	10	19	3
9	18	2	11	25

Nous avons écrit au début de cette partie qu'un carré diabolique vérifiait les propriétés du carré magique mais aussi d'autres configuration. Il y a deux configurations possibles :

1. En additionnant tous les nombres formant le signe + dans le tableau on a le même total dans n'importe quelle zone (exemples les nombres en rouges dans le tableau).

2. En additionnant tous les nombres formant le signe X dans le tableau on a le même total dans n'importe quelle zone (exemple les nombres en bleu dans le tableau)

On constate bien que la somme des ces nombres donnent partout 65.

3.2 Les carrés bimagiques

Un carré est dit bimagique lorsque le carré obtenu en élevant au carré chacun de ses éléments reste magique.

Le plus petit carré bimagique connu est d'ordre 8.

Exemple d'un carré bimagique d'ordre 8 :

7	53	41	27	2	52	48	30
12	58	38	24	13	63	35	17
51	1	29	47	54	8	28	42
64	14	18	36	57	11	23	37
25	43	55	5	32	46	50	4
22	40	60	10	19	33	61	15
45	31	3	49	44	26	6	56
34	20	16	62	39	21	9	59

49	2809	1681	729	4	2704	2304	900
144	3364	1444	576	169	3969	1225	289
2601	1	841	2209	2916	64	784	1764
4096	196	324	1296	3249	121	529	1369
625	1849	3025	25	1024	2116	2500	16
484	1600	3600	100	361	1089	3721	225
2025	961	9	2401	1936	676	36	3136
1156	400	256	3844	1521	441	81	3481

Lorsque l'on éleve tous les nombres qui le composent au carré, il reste magique

3.3 Les carrés trimagiques

Un carré est dit trimagique lorsqu'il reste magique en élevant ses termes au carré et au cube. Le premier carré trimagique connu est d'ordre 12.

1	22	33	41	62	66	79	83	104	112	123	144
9	119	45	115	107	93	52	38	30	100	26	136
75	141	35	48	57	14	131	88	97	110	4	70
74	8	106	49	12	43	102	133	96	39	137	71
140	101	124	42	60	37	108	85	103	21	44	5
122	76	142	86	67	126	19	78	59	3	69	23
55	27	95	135	130	89	56	15	10	50	118	90
132	117	68	91	11	99	46	134	54	77	28	13
73	64	2	121	109	32	113	36	24	143	81	72
58	98	84	116	138	16	129	7	29	61	47	87
80	34	105	6	92	127	18	53	139	40	111	65
51	63	31	20	25	128	17	120	125	114	82	94

carré trimagique d'ordre 12

3.4 Les carrés multimagiques

Un carré est dit multimagique lorsqu'il reste magique si ses nombres sont élevés à n'importe quelle puissance. Le premier carré 4-magique, d'ordre 512, fut construit en mai 2001 par André Viricel et Christian Boyer ; puis, un mois plus tard, en juin 2001, Viricel et Boyer présentèrent le premier carré 5-magique, d'ordre 1024. Ils ont aussi présenté un carré 4-magique d'ordre 256 en janvier 2003, et un autre carré 5-magique, d'ordre 729, fut construit en juin 2003 par le mathématicien chinois Li Wen.

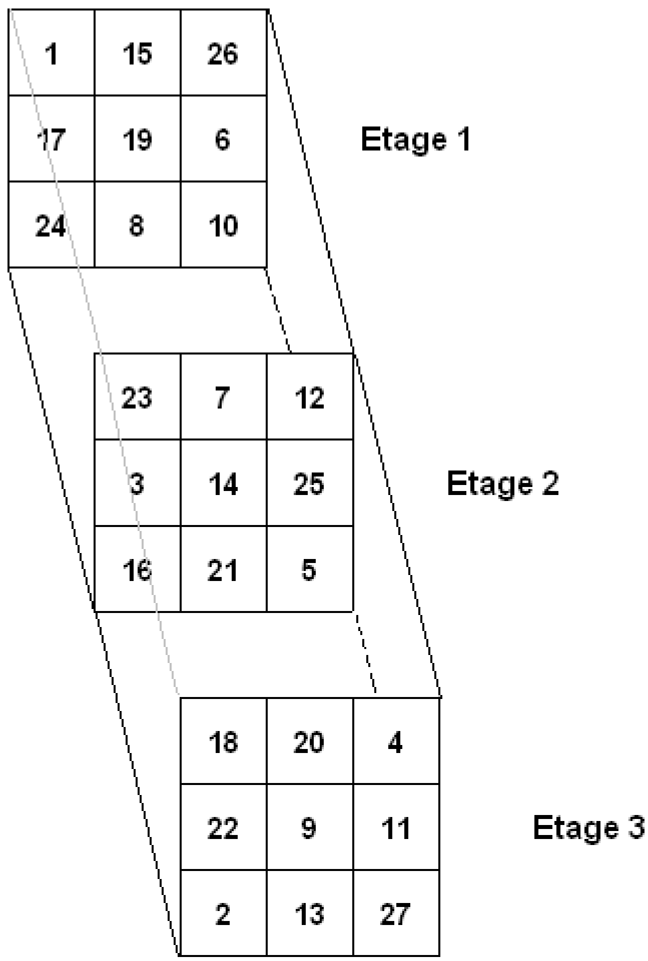
3.5 Le carré magique de Skalli

Les carrés magiques peuvent être intégralement constitués de nombres premiers. C'est le cas du carré magique de Skalli qui est aussi diabolique. La somme est également un nombre premier : 19577.

5869	127	7547	5003	1031
5009	1013	5879	139	7537
149	7549	4999	1019	5861
1009	5867	131	7559	5011
7541	5021	1021	5857	137

3.6 Le cube magique

Un cube est magique lorsque la somme des éléments des alignements, lignes et colonnes des différentes coupes horizontales (plans et étages), et des sections verticales orthogonales, est égale à une même constante.



Représentation d'un cube magique d'ordre 3 par ses plans horizontaux

Au travers de cette approche des carrés magiques, nous constatons qu'il n'y a pas de limites d'ordre de grandeur, de propriétés ni de dimension en ce qui concerne les carrés magiques.

Bibliographie :
- Les carrés magiques , de René Descombes
- wikipedia
- http ://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/CarreMag/CMhistor.htm